# КРИТИКА ТЕОРЕМЫ РИМАНА О СУММЕ УСЛОВНО СХОДЯЩЕГОСЯ РЯДА

Вначале докажем, что теорема неверна. Итак, теорема утверждает, что путем перестановки членов условно сходящегося ряда, сумму ряда можно привести к любому наперед заданному числу. При этом в доказательстве сумму ряда приводят к этому числу последовательным приближением, поочередно суммируя некоторое количество положительных и отрицательных членов.

Для знакочередующегося ряда $\mathsf{q}_{2n} > 0, \mathsf{q}_{2n-1} < 0$, имевшего до перестановки сумму $S$, приводимому к числу $L > S$, суммируются положительные члены пока их сумма не превзойдет $L$ :

$$\mathsf{q}_2 + \mathsf{q}_4 + \cdots + \mathsf{q}_{2m} > L$$

Затем к имеющейся сумме прибавляются отрицательные члены, пока сумма не станет меньше $L$ :

$$\mathsf{q}_2 + \mathsf{q}_4 + \cdots + \mathsf{q}_{2m} + \mathsf{q}_1 + \mathsf{q}_3 + \cdots + \mathsf{q}_{2k-1} < L$$

После каждой операции последовательного приближения частичная сумма ряда будет отличатся от $L$ на величину меньшую абсолютной величины последнего слагаемого члена.

Заметим во-первых, что целью этой перестановки является то, чтобы $m$ было больше $k$. А во-вторых то, что в доказательстве предел частичных сумм, как сумма получившаяся после перестановки, декларируется, но в явном виде не написан. Сделаем то, что забыл сделать Риман, а именно - напишем пределы :

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathsf{q}_n = \lim_{k\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{k} \mathsf{q}_{2n} + \sum_{n=1}^{k} \mathsf{q}_{2n-1} \right) = S$$

$$\lim_{k,m\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{k} \mathsf{q}_{2n} + \sum_{n=1}^{k} \mathsf{q}_{2n-1} + \sum_{n=k+1}^{m} \mathsf{q}_{2n} \right) = L$$

$$\lim_{k,m\to\infty}\left(\sum_{n=k+1}^{m}\mathsf{q}_{2n}\right) = L - S$$

$$\mathsf{q}_n \to 0 \Rightarrow (m-k)\to\infty$$

Таким образом то, что при любом , сколь угодно малом отличии заданного числа от суммы ряда, разница количеств суммируемых четных и нечетных членов ряда стремится к бесконечности, делает доказательство неверным.

Доказать неизменность суммы условно сходящегося знакочередующегося ряда при перестановках его членов можно двумя способами:

Во-первых очевидно, что если знакочередующийся ряд $\mathsf{q}_n$ имеет сумму $S$, то $\forall\forall m, k$ если

$$\sum_{n=1}^{m}\mathsf{q}_{2n} + \sum_{n=1}^{k}\mathsf{q}_{2n-1} = L$$

то

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\mathsf{q}_{2n} + \sum_{n=k+1}^{\infty}\mathsf{q}_{2n-1} = S - L$$

Во-вторых для любого нечетного члена ряда, стоящего при любой перестановке на любом месте, существует четный член с индексом на единицу больше и образованный из их сумм ряд $\Sigma_{n=1}^{\infty}\left(\mathsf{q}_{2n-1} + \mathsf{q}_{2n}\right)$ существует и абсолютно сходится. И следовательно удовлетворяет условию теоремы Дирихле о неизменности суммы при перестановке.

Таким же образом доказывается неизменность суммы любого знакопеременного ряда.

Александр Николаевич Конон,1985 год